Т е о р е м а 6. Оснащающая плоскость B переносится параллельно в связности $\Gamma'' = \{\Gamma^{\bar{a}}_{\bar{c}i}, \Gamma^{a}_{bi}, \Gamma^{a}_{bi}\}$ тогда и только тогда, когда она смещается в плоскости, натянутой на нее и плоскость L_ℓ.

Т е о р е м а 7. Оснащающую плоскость B нельзя перенести параллельно в связности

$$\Gamma''' = \{\Gamma^{\nu}_{\mu i}, \Gamma^{a}_{bi}, \Gamma^{\mu}_{bi}, \Gamma^{\bar{a}}_{\bar{c}i}, \Gamma^{a}_{bi}\}.$$

Список литературы

1. Норден А.П. Теория композиций.-В кн.: Проблемы геометрии. М., 1976, 10, с. 117-145.

2. Шевченко Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I2, Калининград, 1981, с. 126-130.

3. Bucur W. Проективная классификация грассмановых соотношений и определение минимальных моделей совокупностей обобщенных пространственных элементов. Ann. math. pura ed appl, 1953, ар 434, 1с. 133-160.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. I6 1985

УДК 514.75

В. П. Ц А П Е Н К О

СВЯЗНОСТЬ В МНОГООБРАЗИИ ПАР ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ, ИНДУЦИРОВАННОМ ГИПЕРКОНГРУЭНЦИЕЙ V_{n-1}

В n-мерном проективном пространстве продолжается [1] изучение гиперконгруэнций V_{n-1} -(n-1)-параметрических невырожденных многообразий пар фигур (P,Q), где Q - гиперквадрика, а P -неинцидентная ей точка. Обозначим L_{n-1} -гиперплоскость, полярно-сопряженную точке P относительно гиперквадрики Q, T_{n-1} -гиперплоскость, касательную к гиперповерхности S_{n-1}, описанной точкой P, а $\mathfrak{M}$ - многообразие, порожденное парой гиперплоскостей L_{n-1} и T_{n-1}, ассоциированное с гиперконгруэнцией V_{n-1}.

Подвижной репер $R = \{A, A_\alpha, A_n\}$ специализируем следующим образом: вершину $A \equiv A_0$ совместим с точкой P, вершины A_α (α, β, γ =1,2,...,n-1) поместим в (n-2)-мерное пересечение M_{n-2} гиперплоскостей L_{n-1} и T_{n-1}, а вершину A_n - в гиперплоскость L_{n-1} так, чтобы $A_n \notin M_{n-2}$. Относительно репера R гиперквадрика Q задается уравнением:

$a_{ij}x^i x^j + (x^0)^2 = 0$, где i, j =1,2,...,n. Система уравнений Пфаффа гиперконгруэнции V_{n-1} в репере R запишется в виде:

$$\omega^0_i = \mu_{i\beta}\,\omega^\beta_0, \quad \omega^n_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_0 \ (\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta\alpha}),$$

$$\omega^n_0 = 0, \qquad \nabla a_{ij} = a_{ij\beta}\,\omega^\beta_0.$$

Продолжая эту систему, получим

$$\nabla \mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma_0,$$

$$\nabla \mu_{n\beta} = \mu_{n\beta}(\omega^n_n - \omega^0_0) + \mu_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_n + \mu_{n\beta\gamma}\,\omega^\gamma_0,$$

$$\nabla \Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta}(\omega^0_0 - \omega^n_n) + \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma_0,$$

$$\nabla a_{ij\beta} = a_{ij\beta\gamma}\,\omega_0^\gamma,$$

где дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом: $\nabla E_{a_1\dots a_r} = dE_{a_1\dots a_r} - E_{b a_2\dots a_r}\,\omega^b_{a_1} - \dots - E_{a_1\dots a_{r-1}b}\,\omega^b_{a_r} + r\cdot E_{a_1\dots a_r}\,\omega_0^0$.

С многообразием V_{n-1} ассоциируется главное расслоение $G_r(S_{n-1})$ со структурными уравнениями

$$d\omega_0^\alpha = \omega_0^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha\,\omega_0^0),$$
$$d\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \mu_{\beta\gamma}\,\omega_0^\gamma \wedge \omega_0^\alpha + \Lambda_{\beta\gamma}\,\omega_0^\gamma \wedge \omega_n^\alpha,$$
$$d\omega_n^\alpha = \omega_n^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega_n^n \wedge \omega_n^\alpha + \mu_{n\beta}\,\omega_0^\beta \wedge \omega_0^\alpha,$$
$$d\omega_n^n = \Lambda_{\alpha\beta}\,\omega_n^\alpha \wedge \omega_0^\beta.$$

Базой главного расслоения $G_r(S_{n-1})$ является гиперповерхность S_{n-1}, а типовым слоем - подгруппа стационарности G_r пары гиперплоскостей (L_{n-1}, T_{n-1}). Фундаментально-групповую связность в $G_r(S_{n-1})$ зададим по Г.Ф.Лаптеву [2] с помощью поля объекта связности $\Gamma = (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, \Gamma^\alpha_\gamma, \Gamma_\gamma)$ на базе S_{n-1}, удовлетворяющего условиям:

$$\nabla\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Lambda_{\beta\gamma}\,\omega_n^\alpha \equiv 0,$$
$$\nabla\Gamma^\alpha_\gamma + \Gamma^\alpha_\gamma(\omega_0^0 - \omega_n^n) + \Gamma_\gamma\,\omega_n^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega_n^\beta \equiv 0,$$
$$\nabla\Gamma_\gamma - \Lambda_{\alpha\gamma}\,\omega_n^\alpha \equiv 0,$$

где символом $\equiv$ обозначено сравнение по модулю базисных форм ω_0^α.

Т е о р е м а 1. Присоединение к каждой паре фигур (P, Q) точки, лежащей в гиперплоскости L_{n-1} и не принадлежащей гиперплоскости T_{n-1}, позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_r(S_{n-1})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Указанную в теореме точку B зададим разложением $B = \lambda^\alpha A_\alpha + A_n$, причем из условия ее относительной инвариантности имеем

$$\nabla\lambda^\alpha = \lambda^\alpha(\omega_n^n - \omega_0^0) - \omega_n^\alpha + \lambda^\alpha_\beta\,\omega_0^\beta. \qquad (1)$$

Фундаментальный тензор $\Lambda_{\alpha\beta}$ и оснащающий квазитензор λ^α позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha\Lambda_{\beta\gamma};\quad \Gamma^\alpha_\beta = -\lambda^\alpha\lambda^\gamma\Lambda_{\gamma\beta},\quad \Gamma_\alpha = -\lambda^\beta\Lambda_{\beta\alpha}.$$

Т е о р е м а 2. Связность в ассоциированном расслоении $G_r(S_{n-1})$ возникает внутренним образом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве точки B достаточно взять точку $A_n - \mu^{\alpha\beta}\mu_{n\alpha}A_\beta$, определяемую самим многообразием V_{n-1}.

Т е о р е м а 3. Точка B переносится параллельно в связности Γ в том и только том случае, когда она смещается вдоль прямой AB.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя уравнения (1), найдем ковариантный дифференциал квазитензора λ^α - $\mathcal{D}\lambda^\alpha = \tilde\lambda^\alpha_\beta\,\omega_0^\beta$, где $\tilde\lambda^\alpha_\beta$ -ковариантные производные

$$\tilde\lambda^\alpha_\beta = \lambda^\alpha_\beta - \lambda^\gamma\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} + \lambda^\alpha\Gamma_\beta - \Gamma^\alpha_\beta.$$

Для точки B справедливо соотношение

$$dB = \tilde\omega_n^n B + (\lambda^\alpha\mu_{\alpha\beta} + \mu_{n\beta})\,\omega_0^\beta A + \mathcal{D}\lambda^\alpha A_\alpha,$$

откуда получаем, что условия $\mathcal{D}\lambda^\alpha = 0$ параллельного переноса точки B в связности Γ определяют смещение точки B вдоль прямой AB.

З а м е ч а н и е. Гиперповерхность S_{n-1} нормализована в смысле А.П.Нордена , а именно: ее нормалью первого рода служит прямая AB, нормалью второго рода - плоскость M_{n-2}.

Т е о р е м а 4. Подобъект $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ объекта связности характеризуется проекцией на нормаль M_{n-2} смежной с ней нормали $M_{n-2} + dM_{n-2}$ из центра AB.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы получим, рассмотрев имеющие место равенства

$$d\bar A_\alpha = \omega_\alpha^0\bar A + \omega_\alpha^n\bar B + \tilde\omega_\alpha^\beta\bar A_\beta.$$

Список литературы

1. Цапенко В.П. Семейство плоскостей, ассоциированных с гиперконгруэнцией V_{n-1}. -В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14, Калининград, 1983, с. 103

2. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. -Проблемы геометрии, т.9. М., 1979, с.7-246.